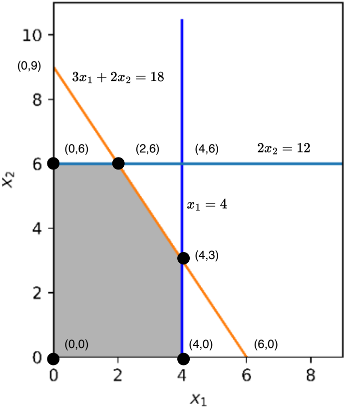
Teoría del método símplex

Luis Norberto Zúñiga Morales

6 de marzo de 2023

Contenido

$$
\begin{aligned}
\max_{x_1,x_2} \quad & Z = 3x_1 + 5x_2 \\
\text{s. a.} \quad & x_1 \leq 4 \\
& 2x_2 \leq 12 \\
& 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\
& x1 \geq 0, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$



Fundamentos del Método Símplex

- Las soluciones óptimas de cualquier problema se programación lineal deben estar en la frontera de la región factible.
- Esto obliga a considerar todas las restricciones como ecuaciones (=).
- Estas ecuaciones definen un **hiperplano** en un espacio *n* dimensional, que en conjunto forman la **frontera de restricción**.

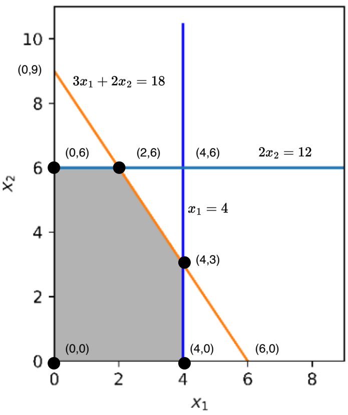


Figura: Fronteras de restricción, ecuaciones de las fronteras de restricción y soluciones en los vértices del problema de la Wyndor Glass Co.

- Una solución factible en un vértice (FEV) es una solución factible que no se encuentra en cualquier segmento de recta que conecta a otras dos soluciones factibles.
- Cada solución FEV es la intersección de dos rectas ($n = 2$), o la solución de un sistema de dos ecuaciones de frontera de restricción.

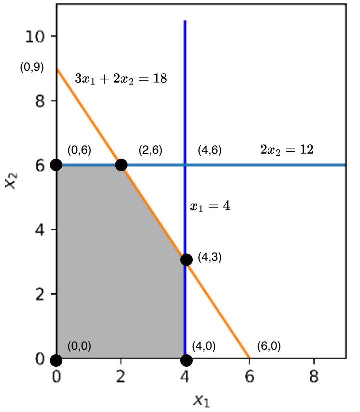


Figura: Fronteras de restricción, ecuaciones de las fronteras de restricción y soluciones en los vértices del problema de la Wyndor Glass Co.

Fundamentos del Método Símplex

- En general, para un problema de programación lineal con *n* variables de decisión, cada solución FEV se encuentra en la intersección de *n* fronteras de restricción (hiperplanos).
- Es decir, es la solución de un sistema de *n* ecuaciones de frontera de restricción.
- Sin embargo, no incluye todos los vértices que se generan.

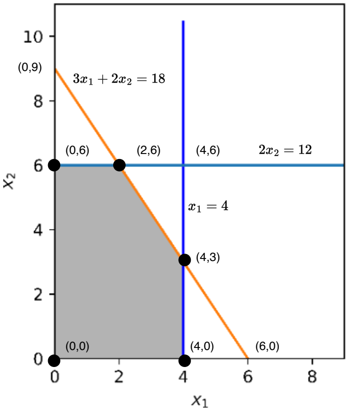


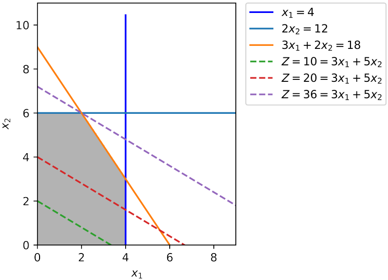
Figura: Fronteras de restricción, ecuaciones de las fronteras de restricción y soluciones en los vértices del problema de la Wyndor Glass Co.

Propiedad 1

a) Si el problema tiene sólo una solución óptima, ésta debe ser una solución FEV.

b) Si el problema tiene soluciones óptimas múltiples (y una región factible acotada), entonces al menos dos deben ser soluciones FEV adyacente.

- La propiedad 1 es intuitiva geométricamente.
- La idea es que la función objetivo (Z) viaje a través de la región factible hasta que solo toque un punto (el óptimo) en un vértice.
- ¿Cómo lo demostrarían?



- Vamos a proceder por contradicción, es decir, existe sólo una solución óptima ($\boldsymbol{x}^*$), con valor correspondiente Z^*, y que no es una solución FEV.
- Como $\boldsymbol{x}^*$ no es una solución FEV, se sigue que deben existir otras dos soluciones factibles tales que el segmento de recta que las une contiene la solución óptima.
- Sean $\boldsymbol{x}^{'}$ y $\boldsymbol{x}^{''}$ las otras dos soluciones factibles y sean Z_1 y Z_2 los valores respectivos de la función objetivo. Vamos a considerar el segmento de recta que conecta a $\boldsymbol{x}^{'}$ y $\boldsymbol{x}^{''}$:

$$\boldsymbol{x}^* = \alpha\boldsymbol{x}^{'} + (1-\alpha)\boldsymbol{x}^{''}$$

para algún valor de $0 < \alpha < 1$.

- Ya que los coeficientes de Z^*, Z_1, Z_2 son idénticos, se deduce que:

$$\boldsymbol{Z}^* = \alpha Z_1 + (1 - \alpha) Z_2.$$

- Como las ponderaciones α y $1 - \alpha$ suman 1, las únicas posibilidades que se tiene al comparar Z^*, Z_1, Z_2 son:
  - $Z^* = Z_1 = Z_2 \rightarrow \boldsymbol{x}^{'}$ y $\boldsymbol{x}^{''}$ también son óptimos.
  - $Z_1 < Z^* < Z_2 \rightarrow$ contradice la suposición de que $\boldsymbol{x}^*$ es óptima.
  - $Z_1 > Z^* > Z_2 \rightarrow$ contradice la suposición de que $\boldsymbol{x}^*$ es óptima.
- Por lo tanto, es imposible tener una solución óptima que no sea una solución FEV.

- Ya que los coeficientes de las variables Z^*, Z_1, Z_2 son idénticos, se deduce que:

$$\boldsymbol{Z}^* = \alpha Z_1 + (1 - \alpha) Z_2.$$

- Como las ponderaciones α y $1 - \alpha$ suman 1, las únicas posibilidades que se tiene al comparar Z^*, Z_1, Z_2 son:
    - $Z^* = Z_1 = Z_2 \rightarrow \boldsymbol{x}^{'}$ y $\boldsymbol{x}^{''}$ también son óptimos.
    - $Z_1 < Z^* < Z_2 \rightarrow$ contradice la suposición de que $\boldsymbol{x}^*$ es óptima.
    - $Z_1 > Z^* > Z_2 \rightarrow$ contradice la suposición de que $\boldsymbol{x}^*$ es óptima.
- Por lo tanto, es imposible tener una solución óptima que no sea una solución FEV.

Para el caso b), es posible tener todas las soluciones óptimas como promedios ponderados de soluciones FEV óptimas.

Y la demostración... ?

Propiedad 2

Existe solo un número finito de soluciones FEV.

- En el caso del problema de la Wyndor Glass Co. es fácil observar que se tienen 5 soluciones FEV.
- En general, cada solución factible en un vértice es la solución simultánea de un sistema de n ecuaciones elegidas entre $m+n$ ecuaciones (n restricciones de no negatividad y m restricciones funcionales).
- ¿Cómo queda el cálculo?

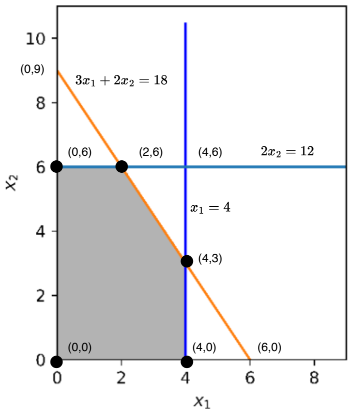


Figura: Fronteras de restricción, ecuaciones de las fronteras de restricción y soluciones en los vértices del problema de la Wyndor Glass Co.

- El número de combinaciones de las $m + n$ ecuaciones tomadas n a la vez es

$$\binom{m+n}{n} = \frac{m+n!}{m!n!}.$$

- Este número es, a su vez, la cota superior del número de soluciones FEV.

- ¿Cómo queda el cálculo para el problema de la Wyndor Glass Co.?

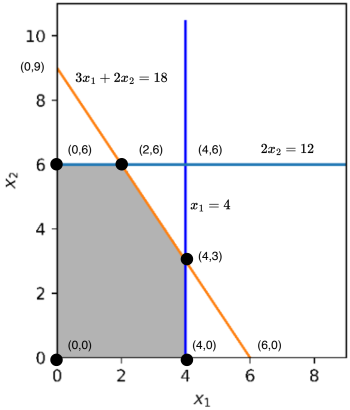


Figura: Fronteras de restricción, ecuaciones de las fronteras de restricción y soluciones en los vértices del problema de la Wyndor Glass Co.

- Aunque el número es finito, en principio, puede obtenerse una solución óptima mediante fuerza bruta.
- Sin embargo, en práctica es poco recomendable.
- Supongan un problema con $m = 50$ y $n = 50$. En total, existen $100!/(50!)^2 \approx 10^{29}$ sistemas de ecuaciones que resolver.
- Afortunadamente, el método símplex llega al óptimo en menos iteraciones.
- ¿Siempre?

Propiedad 3

- Si una solución FEV no tiene soluciones FEV adyacente que sean mejores que ella (Z), entonces no existen soluciones FEV que sean mejores en cualquier otra parte.
- Por lo tanto, se garantiza que tal solución FEV es una solución óptima (por la propiedad 1), si se supone que el problema tiene al menos una solución óptima (se garantiza si el problema tiene soluciones factibles y una región factible acotada).

- Un problema así no se puede presentar en un problema de programación lineal ya que la región factible siempre tiene la propiedad de ser un conjunto convexo.

- La región factible de un problema de programación lineal es la intersección de conjuntos (convexos) de soluciones que satisfacen sus restricciones individuales.

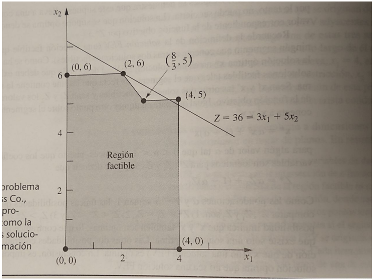


Figura: Problema de la Wyndor Glass Co. que viola tanto la programación lineal como la propiedad 3.

Forma Matricial del Método Símplex

Si se emplean matrices, la forma estádar del modelo general de programación lineal se convierte en

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & Z = \boldsymbol{c}\boldsymbol{x} \\ \text{s. a.} \quad & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

donde $\boldsymbol{c} = [c_1, \ldots, c_n]$, y

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Nota: n controla el número de variables y *b* el número de restricciones funcionales en el problema.

Forma Matricial del Método Símplex

Para obtener la forma aumentada del problema se introduce el vector columna de las variables de holgura

$$\boldsymbol{x}_s = \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_{n+2} \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{bmatrix}$$

de manera que las restricciones se convierten en

$$[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{I}] \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x}_s \end{bmatrix} = \boldsymbol{b} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x}_s \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}$$

donde $\boldsymbol{I} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ es la matriz identidad y el vector $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n+m}$.

- Es necesario recordar que el enfoque general del método símplex radica en obtener una secuencia de soluciones BF mejoradas hasta alcanzar la solución óptima.
- Una de las características clave de la forma matricial del método símplex está relacionado con la forma en que obtiene una nueva solución BF después de identificar sus variables básicas y no básicas.

La solución básica que resulta es la solución de las m ecuaciones

$$[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{I}] \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x}_s \end{bmatrix} = \boldsymbol{b}$$

en las que las n variables no básicas de entre los $n + m$ elementos de

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x}_s \end{bmatrix}$$

se igualan a cero. Cuando se eliminan estas n variables al igualarlas a cero queda un conjunto de m ecuaciones con m incógnitas (las *variables básicas*).

Este sistema de ecuaciones se puede denotar por

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{b}$$

donde el **vector de variables básicas**

$$\boldsymbol{x}_B = \begin{bmatrix} x_{B1} \\ x_{B2} \\ \vdots \\ x_{Bm} \end{bmatrix}$$

se obtiene al eliminar las variables no básicas de

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x}_s \end{bmatrix}$$

y la **matriz base**

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1m} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{m1} & B_{m2} & \cdots & B_{mm} \end{bmatrix}$$

se obtiene al eliminar las columnas correspondientes a los coeficientes de las variables no básicas de $[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{I}]$.

- El método símplex introduce sólo variables básicas tales que $\boldsymbol{B}$ sea *no singular*, de manera que $\boldsymbol{B}^{-1}$ siempre existe.
- Para resolver $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{b}$, se multiplican ambos lados por $\boldsymbol{B}^{-1}$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_B &= \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x}_B &= \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} \end{aligned}$$

- Sea $\boldsymbol{c}_B$ el vector cuyos elementos son los coeficientes del vector objetivo que corresponden a los elementos de $\boldsymbol{x}_B$.
- El valor de la función objetivo de esta solución básica es

$$Z = \boldsymbol{c}_B\boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{c}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$$

Forma original del modelo

$$
\begin{aligned}
\max_{x_1, x_2} \quad & Z = 3x_1 + 5x_2 \\
\text{s. a.} \quad & x_1 \leq 4 \\
& 2x_2 \leq 12 \\
& 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\
& x1 \geq 0, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Forma aumentada del modelo

$$
\begin{aligned}
\max_{x_1, x_2} \quad & Z = 3x_1 + 5x_2 \\
\text{s. a.} \quad & x_1 + \boldsymbol{x_3} = 4 \\
& 2x_2 + \boldsymbol{x_4} = 12 \\
& 3x_1 + 2x_2 + \boldsymbol{x_5} = 18 \\
& x_i \geq 0
\end{aligned}
$$

Forma aumentada del modelo

$$\max_{x_1, x_2} \quad Z = 3x_1 + 5x_2$$

$$\text{s. a.} \quad x_1 + \boldsymbol{x_3} = 4$$

$$2x_2 + \boldsymbol{x_4} = 12$$

$$3x_1 + 2x_2 + \boldsymbol{x_5} = 18$$

$$x_i \geq 0$$

Ejercicio

Vamos a identificar las piezas de la forma matricial del símplex para el problema de la Wyndor Glass Co. Determinen:

$$\boldsymbol{c}, \ [\boldsymbol{A}, \boldsymbol{I}], \ \boldsymbol{b}, \ \boldsymbol{x}, \ \boldsymbol{x}_S$$

Solución

$$\boldsymbol{c} = [3, 5], \quad [\boldsymbol{A}, \boldsymbol{I}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x_S} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

Donde $n = 2$ (número de variables) y $m = 3$ (número de restricciones).

Iter.	Var. básica	Ec.	Coeficiente de: Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Lado der.
0	Z	(0)	1	-3	-5	0	0	0	0
	x_3	(1)	0	1	0	1	0	0	4
	x_4	(2)	0	0	2	0	1	0	12
	x_5	(3)	0	3	2	0	0	1	18
1	Z	(0)	1	-3	0	0	5/2	0	30
	x_3	(1)	0	1	0	1	0	0	4
	x_2	(2)	0	0	1	0	1/2	0	6
	x_5	(3)	0	3	0	0	-1	1	6
2	Z	(0)	1	0	0	0	3/2	1	36
	x_3	(1)	0	0	0	1	1/3	-1/3	2
	x_2	(2)	0	0	1	0	1/2	0	6
	x_1	(3)	0	1	0	0	-1/3	1/3	2

Iteración 0

$$\boldsymbol{x}_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

de manera que $\boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$:

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$$

Para el valor de la función de costo

$$\boldsymbol{c}_B = [0, 0, 0], \quad Z = \boldsymbol{c}_B \boldsymbol{x}_B = [0, 0, 0] \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix} = 0$$

Iteración 1

$$\boldsymbol{x}_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

de manera que $\boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$:

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Para el valor de la función de costo

$$\boldsymbol{c}_B = [0, 5, 0], \quad Z = \boldsymbol{c}_B \boldsymbol{x}_B = [0, 5, 0] \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix} = 30$$

Iteración 2

$$\boldsymbol{x}_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

de manera que $\boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$:

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Para el valor de la función de costo

$$\boldsymbol{c}_B = [0, 5, 3], \quad Z = \boldsymbol{c}_B \boldsymbol{x}_B = [0, 5, 3] \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} = 36$$

Forma Matricial del Método Símplex

Obtención de una solución básica factible

La última consideración es mostrar la forma matricial del conjunto de ecuaciones que aparece en la tala símplex en cualquier iteración del método símplex original.

En el caso del conjunto original de ecuaciones, la forma matricial es

$$\begin{bmatrix} 1 & -\mathbf{c} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z \\ \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}$$

Forma Matricial del Método Símplex

Obtención de una solución básica factible

Cuadro: Primera y última tabla símplex en forma matricial.

Iteración	**Var. Básica**	**Ec.**	**Coeficiente de**			**Lado Derecho**
			Z	**Variables originales**	**Variables de holgura**	
0	Z	(0)	1	$-\boldsymbol{c}$	$\mathbf{0}$	0
	$\boldsymbol{x}_B$	$(1, 2, \ldots, m)$	$\mathbf{0}$	$-bmA$	$\boldsymbol{I}$	$\boldsymbol{b}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Cualquiera	Z	(0)	1	$\boldsymbol{c}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A} - \boldsymbol{c}$	$\boldsymbol{c}_B\boldsymbol{B}^{-1}$	$\boldsymbol{c}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$
	$\boldsymbol{x}_B$	$(1, 2, \ldots, m)$	$\mathbf{0}$	$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}^{-1}$	$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$

En particular, después de cada iteración, $\boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$ y $Z = \boldsymbol{c}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$, por lo que el lado derecho de las ecuaciones se convierte en

$$\begin{bmatrix} Z \\ \boldsymbol{x}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \boldsymbol{c}_B\boldsymbol{B}^{-1} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_B\boldsymbol{B}^{-1} \\ \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} \end{bmatrix}$$

Debido a que realizamos las mismas operaciones en ambos lados del conjunto original de ecuaciones, se usa esta misma matriz que premultiplica el lado derecho original para premultiplicar el lado izquierdo original.

Como

$$\begin{bmatrix} 1 & \boldsymbol{c}_B\boldsymbol{B}^{-1} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\boldsymbol{c} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \boldsymbol{c}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A} - \boldsymbol{c} & \boldsymbol{c}_B\boldsymbol{B}^{-1} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}^{-1} \end{bmatrix}$$

la forma matricial que se busca para el conjunto de ecuaciones después de cualquier iteración es

$$\begin{bmatrix} 1 & \boldsymbol{c}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A} - \boldsymbol{c} & \boldsymbol{c}_B\boldsymbol{B}^{-1} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z \\ \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x}_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z \\ \boldsymbol{x}_B \end{bmatrix}$$

Ejemplo. Para ilustrar esta forma matricial del conjunto actual de ecuaciones, consideremos el conjunto final de ecuaciones que se obtiene en la iteración 2 para el problema de la Wyndor Glass Co. Tenemos que

$$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{c}_B\boldsymbol{B}^{-1} = [0, 5, 3] \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = [0, \frac{3}{2}, 1]$$

$$\boldsymbol{c}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A} - \boldsymbol{c} = [0, 5, 3] \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - [3, 5] = [0, 0]$$

Además, si se utilizan los valores de $\boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$ y $Z = c_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$ que se calcularon anteriormente, se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\left[\begin{array}{c|cc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right] \begin{bmatrix} Z \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 \\ 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Las expresiones matriciales que muestran estas ecuaciones proporcionan una forma directa de calcular todos los números que aparecerían en la tabla símplex (iteración 2).

1. **Inicialización**:
   i. Ingresar las variables de holgura, exceso, artificiales, para obtener las variables básicas iniciales.
   ii. Lo anterior nos da $\boldsymbol{x}_B$, $\boldsymbol{c}_B$, $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{B}^{-1}$

2. **Iteración**:

   i. Determinar la variable básica entrante.

   ii. Determinar variable básica saliente: utilizar las expresiones $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}$ para los coeficientes originales y $\boldsymbol{B}^{-1}$ para las variables de holgura.

   iii. Determinar las nueva solucion BF: Actualizar la matrix base $\boldsymbol{B}$ al reemplazar la columna de la variable básica saliente por la columna correspondiente en $[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{I}]$ para la variable básica entrante. Realizar los reemplazos correspondientes en $\boldsymbol{x}_B$ y en $\boldsymbol{c}_B$.

3. **Prueba de optimalidad**:

   i. Usar las expresiones matriciales $\boldsymbol{c}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A} - \boldsymbol{c}$ (para los coeficientes de las variables originales) y $\boldsymbol{c}_B\boldsymbol{B}^{-1}$ (para los coeficientes de las variables de holgura) para calcular los coeficientes de las variables no básicas de la ecuación (0).

   ii. La solución BF actual es óptima si y sólo si todo estos coeficientes son negativos.

Ejemplo. Ya hemos realizado algunos cálculos matriciales para el problema de la Wyndor Glass Co. Vamos a reutilizar estas partes y unir todo. Como punto de partido recordemos que

$$\boldsymbol{c} = [3, 5], \quad [\boldsymbol{A}, \boldsymbol{I}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{x}_S = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

Inicialización:

Las variables básicas son las variables de holgura, así que:

$$\boldsymbol{x}_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{c}_B = [0, 0, 0], \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{B}^{-1}$$

Prueba de optimalidad:

Los coeficientes de las variables no básicas x_1 y x_2 son:

$$\boldsymbol{c}_B \boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{A} - \boldsymbol{c} = [0, 0] - [3, 5] = [-3, -5]$$

Al ser negativos los coeficientes, la solución BF inicial ($\boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{b}$) no es óptima.

Iteración 1:

Agarramos el coeficientes correspondiente a -5, por lo que la variable básica entrante es x_2. Para determinar qué variable sale con la prueba del cociente:

$$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} - & 0 \\ - & 2 \\ - & 2 \end{bmatrix}$$

y el lado derecho de dichas ecuaciones está dado por el valor de $\boldsymbol{x}_B$ que se muestra en la etapa de inicialización:

$$\boldsymbol{x}_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$$

Al realizar la prueba, obtenemos que la variable que sale es x_4.

Ejercicio

¿Cómo se ve $\boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}_B$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B}^{-1}$ y ahora que x_2 entra a la base?

Ejercicio

¿Cómo se ve $\boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}_B$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B}^{-1}$ y ahora que x_2 entra a la base?

Solución

$$\boldsymbol{x}_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{c}_B = [0, 5, 0]$$

Como pueden ver, x_2 reemplaza a x_4 en $\boldsymbol{x}_B$, para proporcioar un elemento de $\boldsymbol{c}_B$ de $[3, 5, 0, 0, 0]$ y en proporcionar una columna de $[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{I}]$ en $\boldsymbol{B}$.

Prueba de optimalidad:

Las variables no básicas son ahora x_1 y x_4, y sus coeficientes en la ecuación (0) son, para x_1 (variable original):

$$\boldsymbol{c}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A} - \boldsymbol{c} = [0, 5, 0]\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1/2 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\\ 3 & 2\end{bmatrix} - [3, 5] = [-3, -, -]$$

Para x_4 (variable no original):

$$\boldsymbol{c}_B\boldsymbol{B}^{-1} = [0, 5, 0]\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1/2 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix} = [-, 5/2, -]$$

Puesto que x_1 tiene un coeficiente negativo, la solución BF actual no es óptima, por lo que debemos hacer otra iteración.

Iteración 2:

Puesto que x_1 es la variable no básica que entra, sus coeficientes en las demás ecuaciones son:

$$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & - \\ 0 & - \\ 3 & - \end{bmatrix}$$

Utilizando la $\boldsymbol{x}_B$ obtenido al final de la iteración anterior, la prueba del cociente mínimo indica que x_5 es la variable básica que sale $(6/3 < 4/1)$:

$$\boldsymbol{x}_B = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Ejercicio

¿Cómo se ve $\boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}_B$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B}^{-1}$ y ahora que x_1 entra a la base?

Ejercicio

¿Cómo se ve $\boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}_B$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B}^{-1}$ y ahora que x_1 entra a la base?

Solución

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{c}_B = [0, 5, 3]$$

$$\boldsymbol{x}_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Prueba de optimalidad: Las variables no básicas ahora son x_4 y x_5. Sus coeficientes estan dados por:

$$\boldsymbol{c}_B\boldsymbol{B}^{-1} = [0, 5, 3]\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = [0, \frac{3}{2}, 1]$$

es decir, tenemos 3/2 y 1, respectivamnte. Puesto que ninguno es negativo, la solución BF actual ($x_1 = 2, x_2 = 6, x_3 = 2, x_4 = 0, x_5 = 0$) es óptima y termina el proceso.