Solución de Problemas de Programación Lineal

Método Simplex III

Luis Norberto Zúñiga Morales

20 de febrero de 2023

Contenido

Introducción

En la presentación anterior se trabajó el siguiente problema:

$$\begin{aligned}
\min_{x_1, x_2} \quad & Z = 0.4x_1 + 0.5x_2 \\
\text{s. a.} \quad & 0.3x_1 + 0.1x_2 \leq 2.7 \\
& 0.5x_1 + 0.5x_2 = 6 \\
& 0.6x_1 + 0.4x_2 \geq 6 \\
& x1 \geq 0, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

- Para llegar a una solución óptima es necesario realizar iteraciones adicionales después de obtener la primera solución factible del problema real.
- De esta forma, puede pensarse que el método de la gran M tiene dos fases.

Introducción

Iter.	Var. Bás.	Ec.	Coeficiente de: Z	x_1	x_2	x_3	$\bar{x}_4$	x_5	$\bar{x}_6$	Lado Der.
0	Z	(0)	-1	-1.1M+0.4	-0.9M+0.5	0	0	M	0	-12M
	x_3	(1)	0	0.3	0.1	1	0	0	0	2.7
	$\bar{x}_4$	(2)	0	0.5	0.5	0	1	0	0	6
	$\bar{x}_6$	(3)	0	0.6	0.4	0	0	-1	1	6
1	Z	(0)	-1	0	$-\frac{16}{30}$M + $\frac{11}{30}$	$\frac{11}{3}$M - $\frac{4}{3}$	0	M	0	-2.1M-3.6
	x_1	(1)	0	1	1/3	10/3	0	0	0	9
	$\bar{x}_4$	(2)	0	0	1/3	-5/3	1	0	0	1.5
	$\bar{x}_6$	(3)	0	0	0.2	-2	0	-1	1	0.6
2	Z	(0)	-1	0	0	$-\frac{5}{3}$M + $\frac{7}{3}$	0	$-\frac{5}{3}$M + $\frac{11}{6}$	$\frac{8}{3}$M - $\frac{11}{6}$	-0.5M-4.7
	x_1	(1)	0	1	0	20/3	0	5/3	-5/3	8
	$\bar{x}_4$	(2)	0	0	0	5/3	1	5/3	-5/3	0.5
	x_2	(3)	0	0	1	-10	0	-5	5	3
3	Z	(0)	-1	0	0	0.5	M-1.1	0	M	-5.25
	x_1	(1)	0	1	0	5	-1	0	0	7.5
	x_5	(2)	0	0	0	1	0.6	1	-1	0.3
	x_2	(3)	0	0	1	-5	3	0	0	4.5

Introducción

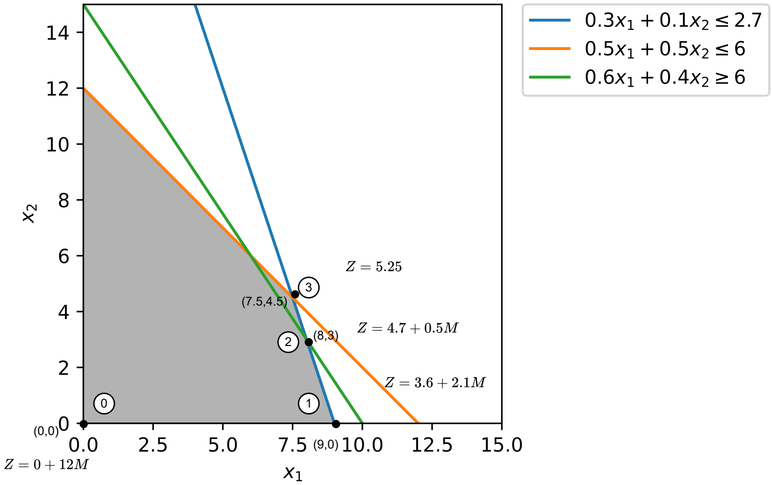


Figura: La gráfica muestra la región factible y la secuencia de soluciones FEV que se examinaron por el método símplex (el método de la gran *M*) del problema artifical.

Introducción

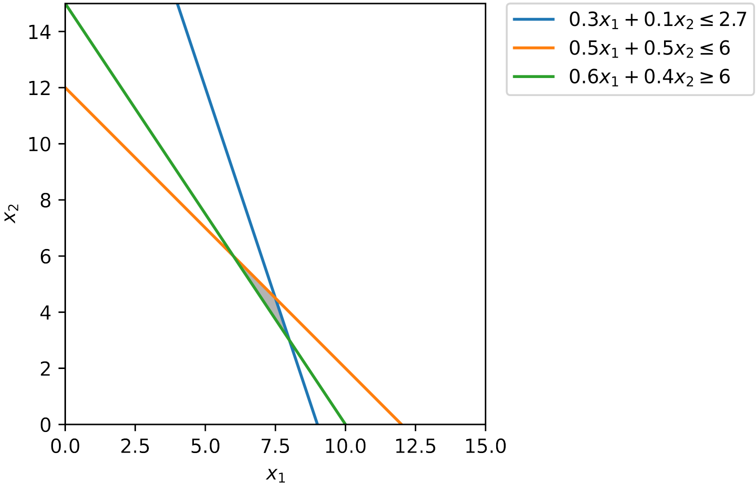


Figura: Suponiendo que el problema no tuviera restricciones de igualdad, todavía no podemos usar el origen como punto de inicio o solución básica factible inicial.

Método de las dos fases

- En la **primera fase**, todas las variables artificiales se hacen cero...
  - Debido a la penalización de M por unidad al ser mayores que cero.
- ...con el fin de obtener una solución básica factible inicial para el problema real.
- En la **segunda fase**, todas las variables artificiales se mantienen en cero, mientras que el método símplex genera una secuencia de soluciones BF que llevan a la solución óptima.
- Esto se conoce como el **método de las dos fases**.

Método de las dos fases

La función objetivo real es

$$\text{mín} \quad Z = 0.4x_1 + 0.5x_2.$$

Sin embargo, el método de la gran M utiliza la siguiente función objetivo en todo el procedimiento

$$\text{mín} \quad Z = 0.4x_1 + 0.5x_2 + M\bar{x}_4 + M\bar{x}_6.$$

Como los dos primeros coeficientes son despreciables comparados con M, el método de las dos fases puede eliminar la M si usan las siguientes dos funciones objetivos que definen Z de manera muy diferente.

Método de las dos fases

Método de las dos fases

Fase 1:	$\min Z = \bar{x}_4 + \bar{x}_6$	hasta $\bar{x}_4 = 0$, $\bar{x}_6 = 0$
Fase 2:	$\min Z = 0.4x_1 + 0.5x_2$	con $\bar{x}_4 = 0$, $\bar{x}_6 = 0$

Método de las dos fases

Método de las dos fases

$$\begin{array}{lll} \textit{Fase 1:} & \min Z = \bar{x}_4 + \bar{x}_6 & \text{hasta } \bar{x}_4 = 0,\ \bar{x}_6 = 0 \\ \textit{Fase 2:} & \min Z = 0.4x_1 + 0.5x_2 & \text{con } \bar{x}_4 = 0,\ \bar{x}_6 = 0 \end{array}$$

- La función objetivo de la fase 1 se obtiene si se divide la función objetivo de método de la gran M entre M y se eliminan los términos despreciables.
- Como la fase 1 termina cuando se obtiene una solución BF para el problema real ($\bar{x}_4 = 0$, $\bar{x}_6 = 0$)...
- Esta solución se usa como la **solución BF inicial** para aplicar el método símplex al problema real en la fase 2.

Método de las dos fases

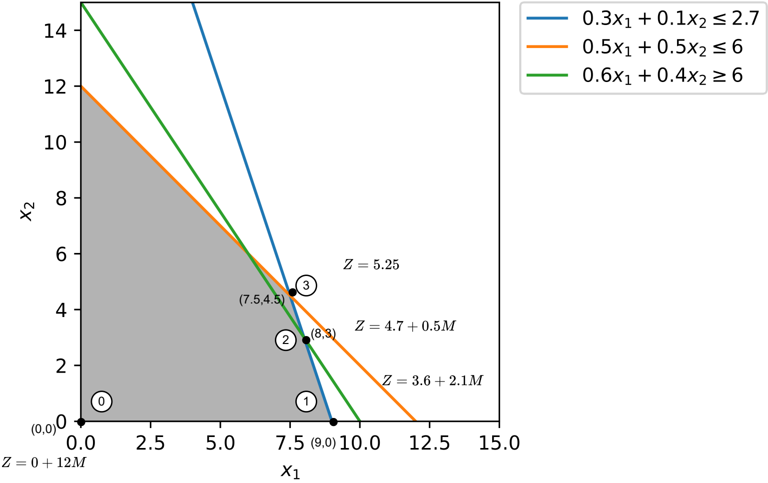


Figura: La gráfica muestra la región factible y la secuencia de soluciones FEV que se examinaron por el método símplex (el método de la gran *M*) del problema artifical.

Método de las dos fases

Iter.	Var. Bás.	Ec.	Coeficiente de: Z	x_1	x_2	x_3	$\bar{x}_4$	x_5	$\bar{x}_6$	Lado Der.
0	Z	(0)	-1	-1.1M+0.4	-0.9M+0.5	0	0	M	0	-12M
	x_3	(1)	0	0.3	0.1	1	0	0	0	2.7
	$\bar{x}_4$	(2)	0	0.5	0.5	0	1	0	0	6
	$\bar{x}_6$	(3)	0	0.6	0.4	0	0	-1	1	6
1	Z	(0)	-1	0	$-\frac{16}{30}M + \frac{11}{30}$	$\frac{11}{3}M - \frac{4}{3}$	0	M	0	-2.1M-3.6
	x_1	(1)	0	1	1/3	10/3	0	0	0	9
	$\bar{x}_4$	(2)	0	0	1/3	-5/3	1	0	0	1.5
	$\bar{x}_6$	(3)	0	0	0.2	-2	0	-1	1	0.6
2	Z	(0)	-1	0	0	$-\frac{5}{3}M + \frac{7}{3}$	0	$-\frac{5}{3}M + \frac{11}{6}$	$\frac{8}{3}M - \frac{11}{6}$	-0.5M-4.7
	x_1	(1)	0	1	0	20/3	0	5/3	-5/3	8
	$\bar{x}_4$	(2)	0	0	0	5/3	1	5/3	-5/3	0.5
	x_2	(3)	0	0	1	-10	0	-5	5	3
3	Z	(0)	-1	0	0	0.5	M-1.1	0	M	-5.25
	x_1	(1)	0	1	0	5	-1	0	0	7.5
	x_5	(2)	0	0	0	1	0.6	1	-1	0.3
	x_2	(3)	0	0	1	-5	3	0	0	4.5

Resumen del método de las dos fases

Paso inicial: se revisan las restricciones del problema original y se introducen las variables artificiales según se necesite para obtener una solución BF inicial obvia para el problema artificial.

Resumen del método de las dos fases

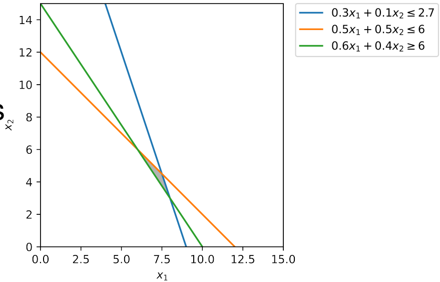
Fase 1:

- El objetivo de esta fase es encontrar una solución BF par el problema real. Es decir, se debe

  $$\text{mín } Z = \sum \text{variables artificiales}$$

  sujeta a las restricciones revisadas.

- La solución óptima que se obtiene para ese problema (con $Z = 0$) será una solución BF para el problema real.

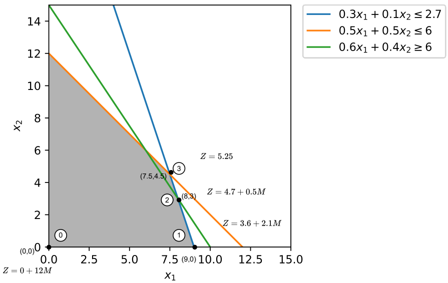


Resumen del método de las dos fases

Fase 2:

- El objetivo de esta fase es encontrar una solución óptima para el problema real. Como las variables artificiales no son parte del problema real, ahora se pueden eliminar.

- Se empieza con la solución BF que se obtuvo al final de la fase 1 y se usa el método símplex para resolver el problema real.



Ejemplo: Método de las dos fases

Problema de la fase 1

$$
\begin{array}{llllllll}
\min\limits_{\bar{x}_4,\bar{x}_6} & Z = \bar{x}_4 & & & +\bar{x}_6 & & & \\
\text{s. a.} & 0.3x_1 & +0.1x_2 + x_3 & & & & & = 2.7 \\
& 0.5x_1 & +0.5x_2 & & +\bar{x}_4 & & & = 6 \\
& 0.6x_1 & +0.4x_2 & & & -x_5 & +\bar{x}_6 & = 6 \\
& x1 \geq 0, & x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, & & \bar{x}_4 \geq 0, x_5 \geq 0, & & \bar{x}_6 \geq 0 &
\end{array}
$$

Problema de la fase 2

$$
\begin{array}{llllr}
\min\limits_{x_1,x_2} & Z = 0.4x_1 & +0.5x_2 & & \\
\text{s. a.} & 0.3x_1 & +0.1x_2 + x_3 & = & 2.7 \\
 & 0.5x_1 & +0.5x_2 & = & 6 \\
 & 0.6x_1 & +0.4x_2 & -x_5 = & 6 \\
 & x1 \geq 0, & x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, & x_5 \geq 0 &
\end{array}
$$

Ejemplo: Método de las dos fases

- La única diferencia entre estos dos problemas se encuentran en **la función objetivo** y en **la inclusión** (fase 1) o **exclusión** (fase 2) **de las variables artificiales** $\bar{x}_4$ y $\bar{x}_6$.
- Sin las variables artificiales, el problema de la fase 2 **no tiene una solución BF inicial obvia.**
- El único propósito de resolver el problema de la fase 1 es **obtener una solución BF** con $\bar{x}_4 = 0$ y $\bar{x}_6 = 0$ que se pueda usar como **solución BF inicial** para la fase 2.

Ejemplo: Método de las dos fases

Ejercicio

Resolver el problema de la fase 1:

$$
\begin{array}{lllllll}
\min\limits_{\bar{x}_4,\bar{x}_6} & Z = \bar{x}_4 & & & +\bar{x}_6 & & \\
\text{s. a.} & 0.3x_1 & +0.1x_2 + x_3 & & & & = 2.7 \\
& 0.5x_1 & +0.5x_2 & +\bar{x}_4 & & & = 6 \\
& 0.6x_1 & +0.4x_2 & & -x_5 & +\bar{x}_6 & = 6 \\
& x1 \geq 0, & x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, & \bar{x}_4 \geq 0, x_5 \geq 0, & \bar{x}_6 \geq 0 & &
\end{array}
$$

Atención: No olviden cambiar minimizar por maximizar y eliminar las variables básicas $\bar{x}_4$ y $\bar{x}_6$ de Z (deben ser cero en ese renglón para después salir de la base).

Ejemplo: Método de las dos fases

Iter.	Var. Bás.	Ec.	Coeficiente de: Z	x_1	x_2	x_3	$\bar{x}_4$	x_5	$\bar{x}_6$	Lado Der.
0	Z	(0)	-1	-1.1	-0.9	0	0	1	0	-12
	x_3	(1)	0	0.3	0.1	1	0	0	0	2.7
	$\bar{x}_4$	(2)	0	0.5	0.5	0	1	0	0	6
	$\bar{x}_6$	(3)	0	0.6	0.4	0	0	-1	1	6
1	Z	(0)	-1	0	-16/30	11/3	0	1	0	-2.1
	x_1	(1)	0	1	1/3	10/3	0	0	0	9
	$\bar{x}_4$	(2)	0	0	1/3	-5/3	1	0	0	1.5
	$\bar{x}_6$	(3)	0	0	0.2	-2	0	-1	1	0.6
2	Z	(0)	-1	0	0	-5/3	0	-5/3	8/3	-0.5
	x_1	(1)	0	1	0	20/3	0	5/3	-5/3	8
	$\bar{x}_4$	(2)	0	0	0	5/3	1	5/3	-5/3	0.5
	x_2	(3)	0	0	1	-10	0	-5	5	3

Ejemplo: Método de las dos fases

Iter.	Var. Bás.	Ec.	Coeficiente de: Z	x_1	x_2	x_3	$\bar{x}_4$	x_5	$\bar{x}_6$	Lado Der.
2	Z	(0)	-1	0	0	-5/3	0	-5/3	8/3	-0.5
	x_1	(1)	0	1	0	20/3	0	5/3	-5/3	8
	$\bar{x}_4$	(2)	0	0	0	5/3	1	5/3	-5/3	0.5
	x_2	(3)	0	0	1	-10	0	-5	5	3
3	Z	(0)	-1	0	0	0	1	0	1	0
	x_1	(1)	0	1	0	0	-4	-5	5	6
	x_3	(2)	0	0	0	1	3/5	1	-1	0.3
	x_2	(3)	0	0	1	0	6	5	-5	6

Ejemplo: Método de las dos fases

- La solución que se obtiene al final de la fase 1 es

$$(x_1, x_2, x_3, \bar{x}_4, x_5, \bar{x}_6) = (6, 6, 0.3, 0, 0, 0).$$

- Después de eliminar $\bar{x}_4$ y $\bar{x}_6$

$$(x_1, x_2, x_3, x_5) = (6, 6, 0.3, 0).$$

- Esta solución de la fase 1 es una solución BF para el problema real (de la fase 2) ya que es la solución (con $x_5 = 0$) del sistema de ecuaciones del problema de la fase 2.

Ejemplo: Método de las dos fases

	Var. Bás.	Ec.	Coeficiente de: Z	x_1	x_2	x_3	$\bar{x}_4$	x_5	$\bar{x}_6$	Lado Der.
Tabla símplex final fase 1	Z	(0)	-1	0	0	0	1	0	1	0
	x_1	(1)	0	1	0	0	-4	-5	5	6
	x_3	(2)	0	0	0	1	3/5	1	-1	0.3
	x_2	(3)	0	0	1	0	6	5	-5	6
Se eliminan $\bar{x}_4$ y $\bar{x}_6$	Z	(0)	-1	0	0	0		0		0
	x_1	(1)	0	1	0	0		-5		6
	x_3	(2)	0	0	0	1		1		0.3
	x_2	(3)	0	0	1	0		5		6
Se sustituye la función objetivo de la fase 2	Z	(0)	-1	0.4	0.5	0		0		0
	x_1	(1)	0	1	0	0		-5		6
	x_3	(2)	0	0	0	1		1		0.3
	x_2	(3)	0	0	1	0		5		6
Se restablece la forma apropiada de eliminación gaussiana	Z	(0)	-1	0	0	0		-0.5		-5.4
	x_1	(1)	0	1	0	0		-5		6
	x_3	(2)	0	0	0	1		1		0.3
	x_2	(3)	0	0	1	0		5		6

Ejemplo: Método de las dos fases

Iter.	Var. Bás.	Ec.	Coeficiente de: Z	x_1	x_2	x_3	x_5	Lado Der.
0	Z	(0)	-1	0	0	0	-0.5	-5.4
	x_1	(1)	0	1	0	0	-5	6
	x_3	(2)	0	0	0	1	1	0.3
	x_2	(3)	0	0	1	0	5	6
1	Z	(0)	-1	0	0	0.5	0	-5.25
	x_1	(1)	0	1	0	5	0	7.5
	x_5	(2)	0	0	0	1	1	0.3
	x_2	(3)	0	0	1	-5	0	4.5

Ejemplo: Método de las dos fases

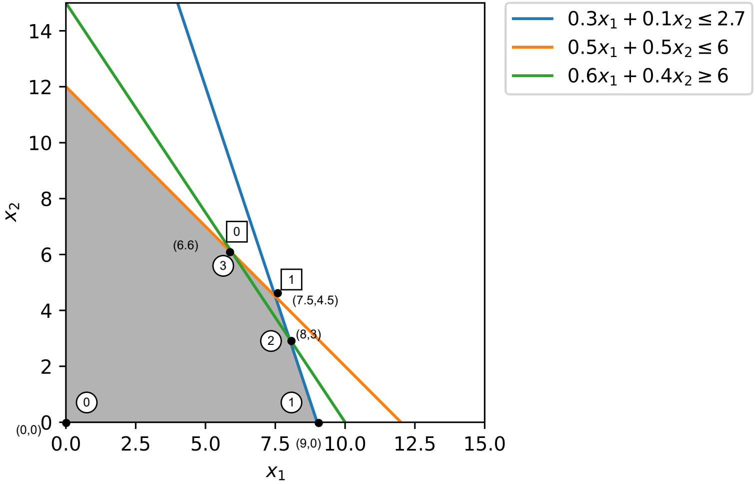


Figura: La gráfica muestra la secuencia de soluciones FEV de la fase 1 (círculo) y después de la fase 2 (cuadros) cuando se aplica el método de las dos fases.

Ejemplo: Método de las dos fases

Ejercicio

En la segunda iteración se eligió al azar la forma de romper el empate. ¿Que hubiera pasado si se elige la otra columna?
Realizar el procedimiento eligiendo la columna correspondiente a x_5 en lugar de la de x_3.

Ejemplo: Método de las dos fases

Ejercicio

¿Qué similitudes tiene el método de las dos fases con el método de la gran m?

Ejemplo: Método de las dos fases

- La función objetivo del método de la gran M:

$$\text{Minimizar} \quad Z = 0.4x_1 + 0.5x_2 + M\bar{x}_4 + M\bar{x}_6$$

- Función objetivo del método de las dos fases:

$$\begin{array}{lll} \text{Fase 1:} & \text{Minimizar} & Z = \bar{x}_4 + \bar{x}_6 \\ \text{Fase 2:} & \text{Minimizar} & Z = 0.4x_1 + 0.5x_2 \end{array}$$

- Dado que los términos $M\bar{x}_4$ y $M\bar{x}_6$ dominan a los términos $0.4x_1$ y $0.5x_2$ en la función objetivo de la gran M, esta es esencialmente equivalente a la de la fase 1.

Ejemplo: Método de las dos fases

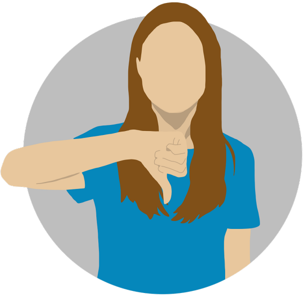
- Debido a estas equivalencias de las funciones objetivo, el método de la gran M y el de las dos fases tienen casi siempre la misma secuencia de soluciones básicas factibles.
- La única excepción es cuando existen empates en la variable básica que entra.
- Las tablas del símplex son similares, pues la única diferencia es que los factores multiplicativos de M se convierten en cantidades únicas.

Sin soluciones factibles

- Hasta el momento, el método de la gran M o el de las dos fases permite identificar una solución inicial cuando no se dispone de una obvia.
- Con esto, se puede comenzar el recorrido hacias las soluciones BF hasta encontrar una supuesta solución óptima.
- ¿Muy bueno para ser verdad?

Sin soluciones factibles

- Es posible que no exista una selección obvia para la solución BF inicial...
- Por la simple razón de que **no existen soluciones factibles**.
- El método de variables artificiales nos puede mentir.
- ¿Cómo identificarlo?



Sin soluciones factibles

La técnica de variables artificiales proporciona algunas señales que indican lo anterior:

Pista

- Si el problema original **no tiene soluciones factibles**, cualquier solución óptima que se obtenga con el método de la gran M o en la fase 1...
- ...lleva a una solución final que contiene al menos una variable artificial mayor que cero.
- De otra manera, todas son iguales a **cero**.

Sin soluciones factibles

Para ilustrar lo anterior, vamos a cambiar la restricción del ejemplo como sigue:

$$0.3x_1 + 0.1x_2 \leq 2.7 \quad \rightarrow \quad 0.3x_1 + 0.1x_2 \leq 1.8$$

lo cual provoca que el problema no tenga soluciones factibles. Vamos a ver por qué.

Sin soluciones factibles

Ejercicio

Consideren el siguiente problema:

$$\begin{aligned}
\min_{x_1, x_2} \quad & Z = 0.4x_1 + 0.5x_2 \\
\text{s. a.} \quad & 0.3x_1 + 0.1x_2 \leq 1.8 \\
& 0.5x_1 + 0.5x_2 = 6 \\
& 0.6x_1 + 0.4x_2 \geq 6 \\
& x1 \geq 0, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

- Grafiquen la región factible.
- Intentar resolver con el método de la gran M.

Sin soluciones factibles

Iter.	Var. Bás.	Ec.	Z	x_1	x_2	x_3	$\bar{x}_4$	x_5	$\bar{x}_6$	Lado der.
0	Z	(0)	-1	-1.1M+0.4	-0.9M+0.5	0	0	M	0	-12M
	x_3	(1)	0	0.3	0.1	1	0	0	0	1.8
	$\bar{x}_4$	(2)	0	0.5	0.5	0	1	0	0	6
	$\bar{x}_6$	(3)	0	0.6	0.4	0	0	-1	1	6
1	Z	(0)	-1	0	$-\frac{16}{30}M+\frac{11}{30}$	$\frac{11}{3}M-\frac{4}{3}$	0	M	0	-5.4M-2.4
	x_1	(1)	0	1	1/3	10/3	0	0	0	6
	$\bar{x}_4$	(2)	0	0	1/3	-5/3	1	0	0	3
	$\bar{x}_6$	(3)	0	0	0.2	-2	0	-1	1	2.4
2	Z	(0)	-1	0	0	M+0.5	1.6M-1.1	M	0	-0.6M-5.7
	x_1	(1)	0	1	0	5	-1	0	0	3
	x_2	(2)	0	0	1	-5	3	0	0	9
	$\bar{x}_6$	(3)	0	0	0	-1	-0.6	-1	1	0.6

Sin soluciones factibles

- En la tabla anterior, el método de la gran M indicaría que la solución óptima es

$$(x_1, x_2, x_3, \bar{x}_4, x_5, \bar{x}_6) = (3, 9, 0, 0, 0, 0.6)$$

- Sin embargo, en este caso, ya que la variable artificial $\bar{x}_6 > 0$, el mensaje real es que **el problema no tiene soluciones factibles.**

Variables que pueden ser negativas

En el inicio discutimos sobre el significado que pueden tener las variables de decisión y los valores que pueden tomar.

- Estamos de acuerdo que si manejamos personas, no podemos asignar la mitad o una cuarta parte de ella.
- El valor de producción de un producto debe ser positivo.

Hasta el momento hemos manejado valores donde $x_i >= 0$ o $x_i = 0$. No podemos limitarnos a esto, por lo que vamos a considerar ahora problemas donde $x_i <= 0$

Variables que pueden ser negativas

- El procedimiento para determinar la variable básica saliente requiere que todas las variables tengan restricción de no negatividad.
- Cualquier problema que contenga variables que puedan adquirir valores negativos debe convertirse en un problema **equivalente**.
- La idea es que sólo emplee variables no negativas antes de aplicar el método símplex.
- La modificación depende de que tenga o no una cota inferior (negativa) sobre los valores permitidos.

Variables con una cota sobre valores negativos permitidos

Consideremos cualquier variable de decisión x_j que puede tener valores negativos, pero nada más aquellos que satisfacen una restricción de la forma

$$x_j \geq L_j$$

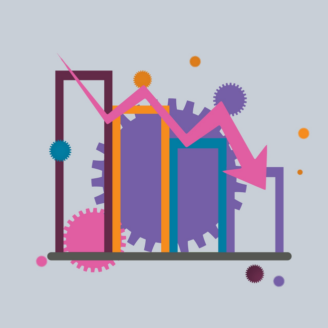
donde L_j es una constante negativa. Esta restricción se puede convertir en una de no negatividad al cambiar de variables

$$x_j^{'} = x_j - L_j$$

entonces $x_j^{'} > 0$. Así, $x_j^{'} + L$ se sustituye por x_j en el modelo y la nueva variable de decisión $x_j^{'}$ no puede ser negativa.

Variables con una cota sobre valores negativos permitidos

- En el problema de la Wyndor Glass Co., supongamos que el producto 1 ya está en producción.
- La variable de decisión x_1 ahora representa el **incremento** de la tasa de producción.
- Un valor negativo en la variable indica que debe reducirse la fabricación del producto 1 en esa cantidad.
- En consecuencia, se incrementa la producción del producto 2, más rentable.



Variables con una cota sobre valores negativos permitidos

Supongamos que la tasa de producción actual del producto 1 en el problema de la Wyndor Glass Co. es 10. Con la definición anterior, la restricción de x_1 se convierte en

$$x_1 \geq -10$$

Variables con una cota sobre valores negativos permitidos

Supongamos que la tasa de producción actual del producto 1 en el problema de la Wyndor Glass Co. es 10. Con la definición anterior, la restricción de x_1 se convierte en

$$x_1 \geq -10$$

Pregunta

¿Por qué $x_1 \geq -10$?

Variables con una cota sobre valores negativos permitidos

Supongamos que la tasa de producción actual del producto 1 en el problema de la Wyndor Glass Co. es 10. Con la definición anterior, la restricción de x_1 se convierte en

$$x_1 \geq -10$$

Pregunta

¿Por qué $x_1 \geq -10$?

Para obtener el modelo equivalente, la variable de decisión se redefine como la tasa de producción total del producto 1:

$$x_j^{'} = x_1 + 10$$

Variables con una cota sobre valores negativos permitidos

Esto produce los siguientes cambios en la función objetivo y las restricciones:

El problema real

$$\begin{aligned} \max_{x_1, x_2} \quad & Z = 3x_1 + 5x_2 \\ \text{s. a.} \quad & x_1 \leq 4 \\ & 2x_2 \leq 12 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ & x1 \geq -10, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

El problema modificado

$$\begin{aligned} \max_{x_1', x_2} \quad & Z = 3(x_1' - 10) + 5x_2 \\ \text{s. a.} \quad & x_1' - 10 \leq 4 \\ & 2x_2 \leq 12 \\ & 3(x_1' - 10) + 2x_2 \leq 18 \\ & x_1' - 10 \geq -10, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Variables con una cota sobre valores negativos permitidos

Reduciendo términos, finalmente se obtiene:

$$
\begin{aligned}
\max_{x_1', x_2} \quad & Z = -30 + x_1' + 5x_2 \\
\text{s. a.} \quad & x_1' \leq 14 \\
& 2x_2 \leq 12 \\
& 3x_1' + 2x_2 \leq 48 \\
& x_1' \geq 0, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Variables con una cota sobre valores negativos permitidos

Ejercicio

Resolver el problema

$$\begin{aligned} \max_{x_1, x_2} \quad & Z = -30 + x_1^{'} + 5x_2 \\ \text{s. a.} \quad & x_1^{'} \leq 14 \\ & 2x_2 \leq 12 \\ & 3x_1^{'} + 2x_2 \leq 48 \\ & x_1^{'} \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Variables sin cota sobre valores negativos permitidos

- En caso de que x_j no tenga una cota inferior en el modelo formulado, se requiere un cambio distinto.

Variables sin cota sobre valores negativos permitidos

- En caso de que x_j no tenga una cota inferior en el modelo formulado, se requiere un cambio distinto.
- x_j se sustituye en todo el modelo por la diferencia de dos nuevas variables **no negativas**:

$$x_j = x_j^+ - x_j^-$$

donde $x_j^+ \geq 0, x_j^- \geq 0$

Variables sin cota sobre valores negativos permitidos

- En caso de que x_j no tenga una cota inferior en el modelo formulado, se requiere un cambio distinto.
- x_j se sustituye en todo el modelo por la diferencia de dos nuevas variables **no negativas**:

$$x_j = x_j^+ - x_j^-$$

  donde $x_j^+ \geq 0, x_j^- \geq 0$

- Como x_j^+ y x_j^- pueden tomar cualquier valor no negativo, la diferencia $x_j^+ - x_j^-$ puede tener **cualquier** valor (positivo o negativo).

Variables sin cota sobre valores negativos permitidos

- En caso de que x_j no tenga una cota inferior en el modelo formulado, se requiere un cambio distinto.
- x_j se sustituye en todo el modelo por la diferencia de dos nuevas variables **no negativas**:

$$x_j = x_j^+ - x_j^-$$

  donde $x_j^+ \geq 0, x_j^- \geq 0$
- Como x_j^+ y x_j^- pueden tomar cualquier valor no negativo, la diferencia $x_j^+ - x_j^-$ puede tener **cualquier** valor (positivo o negativo).
- Por lo tanto, es una sustitución legítima en el modelo.

Variables sin cota sobre valores negativos permitidos

- En caso de que x_j no tenga una cota inferior en el modelo formulado, se requiere un cambio distinto.
- x_j se sustituye en todo el modelo por la diferencia de dos nuevas variables **no negativas**:

$$x_j = x_j^+ - x_j^-$$

donde $x_j^+ \geq 0, x_j^- \geq 0$

- Como x_j^+ y x_j^- pueden tomar cualquier valor no negativo, la diferencia $x_j^+ - x_j^-$ puede tener **cualquier** valor (positivo o negativo).
- Por lo tanto, es una sustitución legítima en el modelo.
- Con esto, ya se puede arrancar el método símplex.

Variables sin cota sobre valores negativos permitidos

El problema real

$$\begin{aligned} \max_{x_1, x_2} \quad & Z = 3x_1 + 5x_2 \\ \text{s. a.} \quad & x_1 \leq 4 \\ & 2x_2 \leq 12 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ & x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

El problema modificado

$$\begin{aligned} \max_{x_1^+, x_1^-, x_2} \quad & Z = 3x_1^+ - 3x_1^- + 5x_2 \\ \text{s. a.} \quad & x_1^+ - x_1^- \leq 4 \\ & 2x_2 \leq 12 \\ & 3x_1^+ - 3x_1^- + 2x_2 \leq 18 \\ & x_1^+ \geq 0, x_1^- \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$