Introducción a la Programación Lineal II

Luis Norberto Zúñiga Morales

16 de enero de 2023

Contenido

Introducción

- El problema de la Wyndor Class Co. permite ilustrar un problema común de programación lineal, aunque muy simplificado.
- Es momento de presentar algunas características generales de los problemas de programación lineal y las distintas formas legítimas del modelo matemático.

Terminología

Ejemplo modelo	**Problema general**
Capacidad de producción 3 plantas	Recursos m recursos
Fabricación de productos 2 productos Tasa de producción producto j, x_j	Actividades n actividades Nivel de actividad j, x_j
Ganancia Z	Medida global de desempeño Z Función objetivo c

Terminología

La **forma canónica** del problema de programación lineal se ve de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
\min_{x_i} \quad & c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \\
\text{s. a.} \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \geq b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \geq b_2 \\
& \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \geq b_m \\
& x1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Es decir, todas las variables son no negativas y todas las restricciones son del tipo $\geq$.

Terminología

- $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ es la función que se desea minimizar, también llamada **función objetivo** denotada por Z.

Terminología

- $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ es la función que se desea minimizar, también llamada **función objetivo** denotada por Z.
- $x_1, x_2, ...x_n$ son **las variables de decisión** que deben determinarse. Se pueden ver como el nivel de la actividad $j \in \{1, ..., n\}$.

Terminología

- $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ es la función que se desea minimizar, también llamada **función objetivo** denotada por Z.
- $x_1, x_2, \ldots x_n$ son **las variables de decisión** que deben determinarse. Se pueden ver como el nivel de la actividad $j \in \{1, \ldots, n\}$.
- Los coeficientes $c_1, c_2, \ldots, c_n$ son los **coeficientes de costos.** Un aumento en una unidad de la actividad j incrementa Z en esa medida.

Terminología

- La desigualdad $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_j$ denota la i-ésima **restricción.**

Terminología

- La desigualdad $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_j$ denota la i-ésima **restricción.**
- Los coeficientes a_{ij} se llaman **coeficientes tecnológicos.** Cantidad del recurso i consumido por cada unidad de la actividad j.

Terminología

- La desigualdad $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_j$ denota la i-ésima **restricción.**
- Los coeficientes a_{ij} se llaman **coeficientes tecnológicos.** Cantidad del recurso i consumido por cada unidad de la actividad j.
- b_i es la **cantidad del recurso** $i \in \{1, ..., m\}$ disponible para asignarse a cada actividad.

Terminología

Del problema prototípico visto anteriormente, el recurso que disponible es el **tiempo** de cada planta invertido en producir los productos 1 y 2:

$$
\begin{aligned}
\max_{x_1, x_2} \quad & Z = 3x_1 + 5x_2 \\
\text{s. a.} \quad & x_1 \leq 4 \\
& 2x_2 \leq 12 \\
& 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\
& x1 \geq 0, x_2 \geq 0
\end{aligned} \tag{2}
$$

Terminología

Del problema prototípico visto anteriormente, el recurso que disponible es el **tiempo** de cada planta invertido en producir los productos 1 y 2:

$$
\begin{aligned}
\max_{x_1, x_2} \quad & Z = 3x_1 + 5x_2 \\
\text{s. a.} \quad & x_1 \leq 4 \\
& 2x_2 \leq 12 \\
& 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\
& x1 \geq 0, x_2 \geq 0
\end{aligned}
\tag{2}
$$

¡Atención!

Aquí tenemos un problema de **maximización**, cuando la definición considera un problema de **minimización**. Más adelante abordamos eso.

Terminología

Ejercicio

¿Cómo se vería un problema de minimización en forma matricial?

$$
\begin{aligned}
\min_{x_i} \quad & c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \\
\text{s. a.} \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \geq b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \geq b_2 \\
& \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \geq b_m \\
& x1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0
\end{aligned}
$$

Terminología

Solución

Para el problema de minimización, se llega a lo siguiente:

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{x}} \quad & \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\ \text{s. a.} \quad & A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b} \\ & x_i \geq 0 \end{aligned} \tag{3}$$

donde

- $a_{ij} \in A$ es una matriz en $\mathbb{R}^{m \times n}$
- $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$
- $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$
- $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$

Terminología

Otra forma usual para los problemas de programación lineal es la **forma estándar**:

$$
\begin{aligned}
\min_{\boldsymbol{x}} \quad & \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\
\text{s. a.} \quad & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\
& x_i \geq 0
\end{aligned} \tag{4}
$$

Es decir, todas las restricciones son igualdades y todas las variables son no negativas.

Terminología

El problema de programación lineal, en su **forma general**, se ve de la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
\min_{\boldsymbol{x}} \quad & \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\
\text{s. a.} \quad & A_k \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b} \\
& A_{j-k} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\
& x_l \geq 0 \\
& x_{n-l} \leq 0
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Es decir, se pueden considerar restricciones con **desigualdades del tipo** $\geq$ o **igualdades.** Además, también es posible que las variables de decisión no tengan restricción de **no negatividad.**

Afortunadamente para nosotros, todas las versiones son **equivalentes**. Es decir, una instancia de una forma **se puede transformar en otra de tal manera que ambas tengan la misma solución**.

Para esto, necesitamos aprender a manipular los elementos del problema de programación.

Manipulación del Problema

- Un programa lineal es un problema de maximizar o minimizar una función lineal.
- Todo en presencia de restricciones lineales de desigualdad y/o igualdad.
- Con simples manipulaciones, se puede llegar de una forma a otra equivalente.

Desigualdades y Ecuaciones

- Una desigualdad se puede transformar en una ecuación. Por ejemplo, dada la restricción

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i$$

esta se puede escribir en forma de ecuación restando la **variable de holgura** no negativa $x_{n+i} \geq 0$ obteniendo

$$\sum a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i.$$

Ejercicio

Dada una ecuación de la forma $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$, ¿cómo se transformaría en dos desigualdades?

Manipulación del Problema

Otra manipulación del problema consiste en convertir un problema de maximización en uno de minimización y viceversa. En general,sobre cualquier región:

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \min - \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{6}$$

Es decir, **solo se niega la función de costo**. Las restricciones a las cuales se encuentra sujeta se dejan **intactas**.

Manipulación del Problema

Ejercicio - Tarea

Para terminar de justificar el enunciado de que todas las formas son equivalentes, lo único que faltaría es demostrar que la forma general (Eq. 5) se puede transformar a cualquiera de las formas canónicas o estándar. ¿Cómo lo harían? **Nota:** Investiguen cómo preservar el supuesto de no negatividad de las variables.

Supuestos de Programación Lineal

Para representar un problema de optimización como un programa lineal, se requieren varios supuestos que están implícitos en su planteamiento.

Supuestos de Programación Lineal

Proporcionalidad

- La contribución de cada actividad al valor de la función objetivo Z es **proporcional** al nivel de la actividad x_j, como lo representa $c_j x_j$ en la función objetivo.
- Lo mismo aplica para cada restricción funcional proporcional al nivel de actividad, como lo representa $a_{ij} x_j$.
- En pocas palabras, **elimina exponentes diferentes de uno**.

Supuestos de Programación Lineal

Aditividad

- **Cada** función de un modelo de programación lineal es **la suma de las contribuciones individuales** de las actividades respectivas.
- **Prohíbe los términos de productos cruzados**, i.e., términos que incluyen el producto de dos o más variables, o mantiene el problema lineal.

Supuestos de Programación Lineal

Divisibilidad

- Las variables de decisión pueden tomar **cualquier** valor, incluso valores **no enteros**, que satisfagan las restricciones funcionales y de no negatividad.
- **Los valores permitidos** para las variables de decisión no se restringen a valores enteros, las actividades se pueden realizar a niveles fraccionales.

Supuestos de Programación Lineal

Certidumbre

- Se supone que los valores asignados a cada parámetro de un modelo de programación lineal son **constantes conocidas**.
- Esto incluye a los parámetros c_j en la función objetivo, los coeficientes a_{ij} y los b_i en las restricciones.
- En práctica, esto no suele cumplirse al 100 %: a veces no se sabe con certeza el valor de algún parámetro; o si depende de variables en un futuro, depende de estimaciones de las mismas.

Supuestos de Programación Lineal

Pregunta

¿Qué pasa si no se cumple un supuesto (salvo el de certidumbre)?

Supuestos de Programación Lineal

Pregunta

¿Qué pasa si no se cumple un supuesto (salvo el de certidumbre)?

Respuesta

No se trata de un problema que pueda ser modelado con funciones lineales, por lo que es mejor optar por un problema de programación no lineal.