Introducción a la Programación Lineal I

Luis Norberto Zúñiga Morales

8 de abril de 2023

Contenido

Introducción al Problema

La programación lineal es una herramienta que permite manejar distintos problemas:

- La aplicación general abarca el problema de asignar de **forma óptima recursos limitados** a **actividades que compiten** entre sí por ellos.

Introducción al Problema

La programación lineal es una herramienta que permite manejar distintos problemas:

- La aplicación general abarca el problema de asignar de **forma óptima recursos limitados** a **actividades que compiten** entre sí por ellos.
- Es decir, consiste en elegir el **nivel** de **ciertas actividades** que compiten por recursos escasos necesarios para realizarlas.

Introducción al Problema

La programación lineal es una herramienta que permite manejar distintos problemas:

- La aplicación general abarca el problema de asignar de **forma óptima recursos limitados** a **actividades que compiten** entre sí por ellos.
- Es decir, consiste en elegir el **nivel** de **ciertas actividades** que compiten por recursos escasos necesarios para realizarlas.
- Después, los niveles de actividad que se eligen dictan **la cantidad de recursos** que consumirá cada una de ellas.

Introducción al Problema

¿Por qué el nombre *programación lineal*?

- El adjetivo *lineal* implica las funciones del modelo deben ser **funciones lineales.**

Introducción al Problema

¿Por qué el nombre *programación lineal*?

- El adjetivo *lineal* implica las funciones del modelo deben ser **funciones lineales.**
- La palabra *programación* no se relaciona con la computación; es más un **sinónimo de planeación.**

Introducción al Problema

¿Por qué el nombre *programación lineal*?

- El adjetivo *lineal* implica las funciones del modelo deben ser **funciones lineales.**
- La palabra *programación* no se relaciona con la computación; es más un **sinónimo de planeación.**
- Es decir, es **una planeación de actividades para obtener un resultado óptimo**, i.e., el que mejor alcance la meta especificada entre todas las alternativas factibles según un **modelo matemático.**

Problema Prototípico

La WYNDOR GLASS CO. produce artículos de vidrio, entre ellos ventanas y puertas de vidrio. Cuentan con tres plantas:

- La **Planta 1** fabrica marcos y molduras de aluminio.
- La **Planta 2** fabrica marcos y molduras de madera.
- La **Planta 3** fabrica el vidrio y ensambla los productos.

Problema Prototípico

Debido a una actualización de su catálogo de productos, introdujeron dos productos nuevos:

- **Producto 1**: una puerta de vidrio de 2.5 metros con marco de *aluminio*.
- **Producto 2**: una ventana corrediza de marco de *madera* de 1.5 x 2 metros.

Problema Prototípico

- El primer producto requiere de la capacidad de producción en las plantas 1 y 3.
- El segundo producto requiere de la capacidad de producción de las plantas 2 y 3.

Problema Prototípico

Algunos supuestos que ayudan a la formulación del problema:

- La compañía garantiza que se pueden vender todos los productos que se producen.

Problema Prototípico

Algunos supuestos que ayudan a la formulación del problema:

- La compañía garantiza que se pueden vender todos los productos que se producen.
- Sin embargo, como ambos productos compiten por la capacidad de producción en la Planta 3, no es claro cual mezcla de productos sería la más rentable.

Problema Prototípico

Algunos supuestos que ayudan a la formulación del problema:

- La compañía garantiza que se pueden vender todos los productos que se producen.
- Sin embargo, como ambos productos compiten por la capacidad de producción en la Planta 3, no es claro cual mezcla de productos sería la más rentable.

Objetivo

Determinar **la tasa de producción** de los dos productos con el fin de **maximizar** las ganancias. Todo sujeto a las **restricciones** dadas por **las capacidades de producción** en las tres plantas.

Problema Protípico

Ejercicio

Supongamos que ustedes forman parte del equipo de IO contratado para resolver el problema. ¿Qué información deben recopilar para modelar el problema?

Problema Protípico

Ejercicio

Supongamos que ustedes forman parte del equipo de IO contratado para resolver el problema. ¿Qué información deben recopilar para modelar el problema?

1. Número de horas de producción disponibles por semana en cada planta.
2. Número de horas de fabricación que se emplean para producir cada lote de cada nuevo producto.
3. La ganancia por lote de cada producto nuevo.

Problema Prototípico

Planta	Tiempo de producción por lote, horas		Tiempo disponible en horas por semana
	Producto		
	1	2	
1	1	0	4
2	0	2	12
3	3	2	18
Ganancia por lote	\$3000	\$5000	

Problema Prototípico

- Este es un problema de programación lineal del tipo de **mezcla de productos**.

Problema Prototípico

- Este es un problema de programación lineal del tipo de **mezcla de productos**.
- La definición del problema planteado indica que las decisiones que deben tomarse son **el número de lotes de los productos** que se deben fabricar semanalmente de manera que **se maximice la ganancia total**.

Problema Prototípico

Para formular el problema de programación lineal se definen las siguientes variables:

- x_1 es el número de lotes del producto 1 que se fabrican por semana.
- x_2 es le número de lotes del producto 2 que se fabrican por semana.
- Z es la ganancia semanal (en miles) total que generan los dos productos.

Lo cual nos indica que x_1 y x_2 son las **variables de decisión** del modelo.

Problema Prototípico

Ejercicio

Determinen la función que representa la ganancia del problema.

Problema Prototípico

Ejercicio

Determinen la función que representa la ganancia del problema.

La ganancia esta dada por

$$Z = 3x_1 + 5x_2 \tag{1}$$

por lo que buscamos los valores de x_1 y x_2 que **maximicen** Z.

Sin embargo, existen algunas restricciones a los que se encuentra sujeta esta función: las limitaciones de producción en cada planta.

Problema Prototípico

Planta	**Tiempo de producción por lote, horas**		**Tiempo disponible en horas por semana**
	Producto		
	1	2	
1	1	0	4
2	0	2	12
3	3	2	18
Ganancia por lote	\$3000	\$5000	

Para el producto 1 se dispone de 4 horas por semana en la planta 1. Matemáticamente:

$$x_1 \leq 4 \tag{2}$$

Problema Prototípico

Planta	**Tiempo de producción por lote, horas**		**Tiempo disponible en horas por semana**
	Producto		
	1	2	
1	1	0	4
2	0	2	12
3	3	2	18
Ganancia por lote	\$3000	\$5000	

Para el producto 2 se dispone de 12 horas por semana en la planta 2. Matemáticamente:

$$2x_2 \leq 12 \tag{3}$$

Problema Prototípico

Planta	**Tiempo de producción por lote, horas**		**Tiempo disponible en horas por semana**
	Producto		
	1	2	
1	1	0	4
2	0	2	12
3	3	2	18
Ganancia por lote	\$3000	\$5000	

Para la planta 3, ahora se considera una mezcla de los productos 1 y 2

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18 \tag{4}$$

Problema Prototípico

Finalmente, el problema de programación lineal se ve de la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
\max_{x_1, x_2} \quad & Z = 3x_1 + 5x_2 \\
\text{s. a.} \quad & x_1 \leq 4 \\
& 2x_2 \leq 12 \\
& 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\
& x1 \geq 0, x_2 \geq 0
\end{aligned}
\tag{5}
$$

- Las dos últimas restricciones se añaden para restringir los valores que pueden tomar x_1 y x_2, que son valores positivos.
- Abajo del máx usualmente se indican las variables de la función las cuales se deben optimizar.
- s.a. significa "sujeto a"las restricciones dadas.

Solución Gráfica

- Dado que el problema de programación lineal tiene **sólo dos variables de decisión**, es posible obtener la solución con un procedimiento gráfico.

Solución Gráfica

- Dado que el problema de programación lineal tiene **sólo dos variables de decisión**, es posible obtener la solución con un procedimiento gráfico.
- La idea es identificar la región de valores permisibles de (x_1, x_2) que forman las restricciones, todas al mismo tiempo. Esto se llama **región factible**.

Solución Gráfica

- Dado que el problema de programación lineal tiene **sólo dos variables de decisión**, es posible obtener la solución con un procedimiento gráfico.
- La idea es identificar la región de valores permisibles de (x_1, x_2) que forman las restricciones, todas al mismo tiempo. Esto se llama **región factible**.
- Una vez identificada la región factible, solo falta seleccionar el punto dentro de esa región que maximiza el valor de

$$Z = 3x_1 + 5x_2$$

Solución Gráfica

Ejercicio

Vamos a graficar cada restricción una por una en el mismo plano:

1. ¿A qué nos limita las restricciones $x_1 \geq 0$ y $x_2 \geq 0$?
2. Graficar la desigualdad $x_1 \leq 4$.
3. Graficar la desigualdad $2x_2 \leq 12$
4. Graficar la desigualdad $3x_1 + 2x_2 \leq 18$.
5. Identificar la región factible generada por las restricciones anteriores.

Solución Gráfica

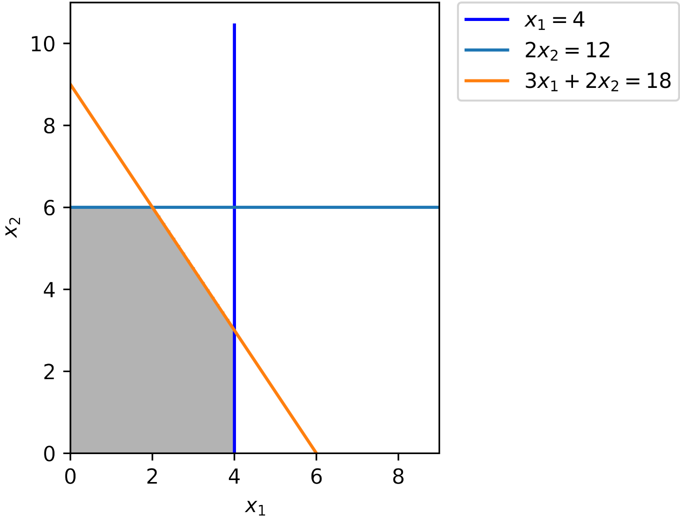

Figura: Región factible del problema (en gris) de la compañía WYNDOR GLASS CO.

Solución Gráfica

Para identificar el valor que maximiza la función $Z = 3x_1 + 5x_2$:

- Se puede intentar el método de prueba y error. Por ejemplo, para la recta

$$Z = 10 = 3x_1 + 5x_2$$

hay algunos puntos que yacen dentro de la región factible.

Ejercicio

Graficar rectas para distintos valores de Z. ¿Pueden encontrar el óptimo de esta manera?

Solución Gráfica

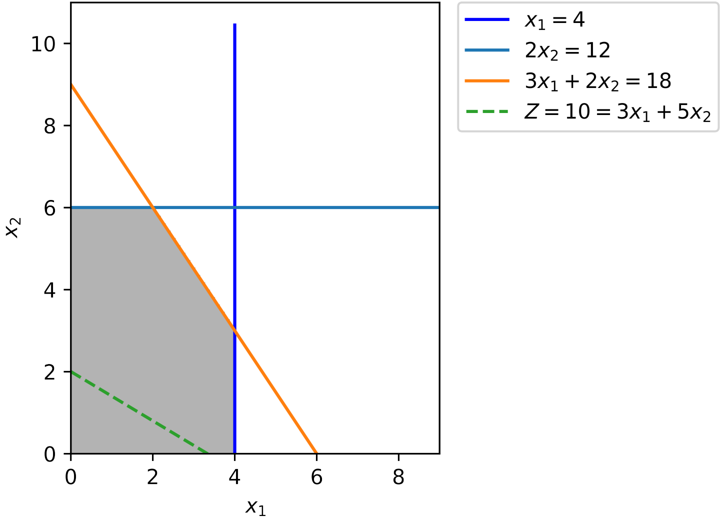

Figura: La recta $3x_1 + 5x_2 = 10$ yace dentro de la región factible para cierta combinación de (x_1, x_2).

Solución Gráfica

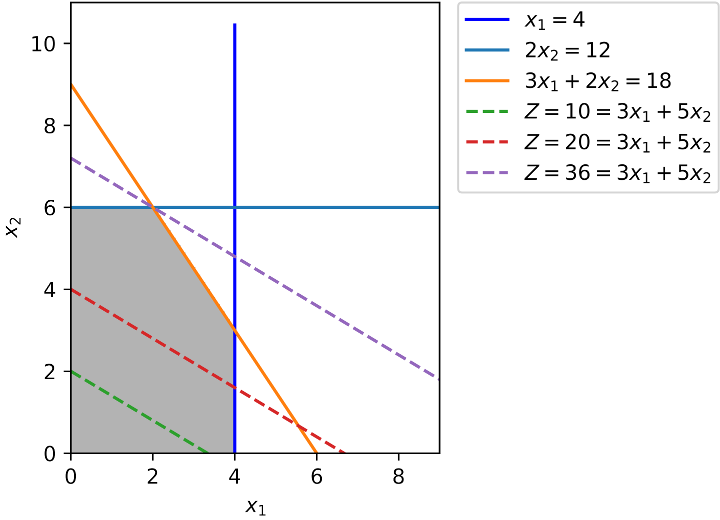

Figura: El óptimo se encuentra en $(2, 6)$

Resultado Final

- Al final, se llegó a la conclusión de que la solución óptima deseada es $x_1 = 2$ y $x_2 = 6$.
- Es decir, WYNDOR GLASS CO. debe fabricar **2 lotes del producto 1** y **6 lotes del producto 2** por semana.
- Todo con una **ganancia total de 36,000**.
- **No existe otra combinación de los dos productos que sea tan redituable**, según el modelo.

Ejercicios

Ejercicio

Usar el método gráfico para resolver el problema:

$$\begin{aligned} \max_{x_1,x_2} \quad & Z = 2x_1 + x_2 \\ \text{s. a.} \quad & x_2 \leq 10 \\ & 2x_1 + 5x_2 \leq 60 \\ & x_1 + x_2 \leq 18 \\ & 3x_1 + x_2 \leq 44 \\ & x1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned} \tag{6}$$

Ejercicios

Ejercicio

Usar el método gráfico para resolver el problema:

$$
\begin{aligned}
\max_{x_1, x_2} \quad & Z = 10x_1 + 20x_2 \\
\text{s. a.} \quad & -x_1 + 2x_2 \leq 15 \\
& x_1 + x_2 \leq 12 \\
& 5x_1 + 3x_2 \leq 45 \\
& x1 \geq 0, x_2 \geq 0
\end{aligned}
\tag{7}
$$